

Конкурс «Ход мысли»

Задачи 2025г.

1. Странные последовательности

Возьмем квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + bx + c$ с вещественными коэффициентами и некоторое вещественное число x_0 . Будем строить последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ Исследуйте, при каких значениях b, c и x_0 эта рекуррентная последовательность $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1), \dots$ сходится. А если не сходится, как можно было бы описать поведение x_n при $n \rightarrow \infty$?

2. Экспериментальная математика

Лена интересуется и физикой, и математикой. Поэтому она решила попытаться определить число π экспериментально. Для этого она нарисовала квадрат со стороной L и вписала в него окружность радиуса $L/2$. Затем она стала бросать в квадрат песчинки случайным образом. Лена рассуждала так: если всего бросить N песчинок, и n из них попадут внутрь круга, то будет примерно верно следующее равенство: $\pi \approx 4n/N$, причём оно будет выполняться тем лучше, чем больше N . Однако, в процессе эксперимента Лене стало понятно, что на точность определения π влияет не только N , но и ряд других факторов. Это и характерный размер песчинки d , и толщина линий квадрата и окружности a , и погрешность измерения всех длин Δl .

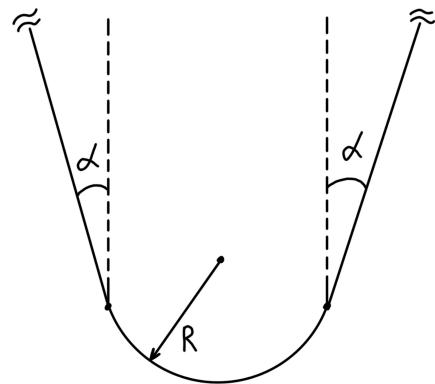
Поразмышляйте о том, как число знаков π , которое можно надежно определить таким методом, зависит от всех этих параметров ($N, L, d, a, \Delta l$). Считайте, что $N \gg 1$, $d/L \ll 1$, $a/L \ll 1$.

3. Костер на далекой планете

Известно, что в невесомости свеча гаснет, поскольку из-за отсутствия конвекции в области горения быстро заканчивается кислород. Будут ли условия для горения неограниченно улучшаться с ростом ускорения свободного падения g ? Оценить, при каком значении g горение станет невозможным, если такое вообще произойдет. Предположим, что химический состав атмосферы зафиксирован и совпадает с земным. Зависит ли в этом случае ответ только от величины g и от каких-то еще факторов? При условии фиксированного химического состава атмосферы, лучше или хуже, чем на Земле, горел бы костер на поверхности Марса, Плутона или планеты, похожей на Юпитер?

4. Формула остроты

Все мы знаем, что есть большая разница - резать что-либо острым или тупым ножом. Поразмышляйте о том, откуда эта разница берется. Почему вообще нож может что-то разрезать? Почему замороженное масло резать трудно, а при комнатной температуре - легко? Попробуйте использовать для анализа модель лезвия, поперечное сечение которого показано на рисунке: с радиусом закругления R и углом схождения плоскостей α . Интуитивно понятно, что чем меньше R , тем «лучше заточка». Но ясно и то, что R не может быть сколь угодно малым, скажем, ангстремного размера, так как нож – макроскопический объект. Таким образом, вероятно, существует некоторое оптимальное R для наилучшей резки. Что это значит количественно? Как зависит от материала, из которого сделан нож и того, что им предполагается резать? Какую роль играет угол α ? Или, возможно, вы предложите свою модель резки?



5. Успеете ли вы поймать уроненный платок?

В развитии физики важную роль сыграло изучение движения различных объектов в поле тяжести Земли. Это и знаменитые опыты Галилея, в том числе, бросание шаров с Пизанской башни, и наблюдение за маятниками, и понятие космической скорости и многое другое. Задача о движении в поле тяжести, однако, становится гораздо более сложной с учетом сопротивления воздуха, если рассматривать перемещение объектов, которые могут изменять свою форму. В качестве примера можно привести свободное падение шелкового платка. Поразмышляйте о характерном (среднем по большому числу экспериментов) времени, которое занимает падение квадратного листа бумаги со стороной a с высоты h в поле тяжести Земли (и поэкспериментируйте!). Представьте, что вы можете изменять плотность воздуха и изгибную жесткость листа. Как будут выглядеть в этих двух переменных линии постоянного среднего времени падения?