

## Конкурс «Ход мысли»

### Задачи 2025г.

#### 1. Странные последовательности

Возьмем квадратный трехчлен  $f(x) = x^2 + bx + c$  с вещественными коэффициентами и некоторое вещественное число  $x_0$ . Будем строить последовательность  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Исследуйте, при каких значениях  $b$ ,  $c$  и  $x_0$  эта рекуррентная последовательность  $x_1 = f(x_0)$ ,  $x_2 = f(x_1), \dots$  сходится. А если не сходится, как можно было бы описать поведение  $x_n$  при  $n \rightarrow \infty$ ?

#### 2. Экспериментальная математика

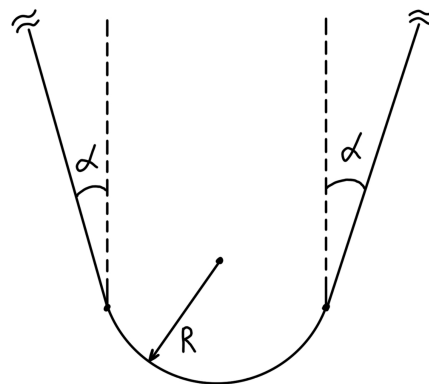
Лена интересуется и физикой, и математикой. Поэтому она решила попытаться определить число  $\pi$  экспериментально. Для этого она нарисовала квадрат со стороной  $L$  и вписала в него окружность радиуса  $L/2$ . Затем она стала бросать в квадрат песчинки случайным образом. Лена рассуждала так: если всего бросить  $N$  песчинок, и  $n$  из них попадут внутрь круга, то будет примерно верно следующее равенство:  $\pi \approx 4n/N$ , причём оно будет выполняться тем лучше, чем больше  $N$ . Однако, в процессе эксперимента Лене стало понятно, что на точность определения  $\pi$  влияет не только  $N$ , но и ряд других факторов. Это и характерный размер песчинки  $d$ , и толщина линий квадрата и окружности  $a$ , и погрешность измерения всех длин  $\Delta l$ . Поразмышляйте о том, как число знаков  $\pi$ , которое можно надёжно определить таким методом, зависит от всех этих параметров ( $N, L, d, a, \Delta l$ ). Считайте, что  $N \gg 1$ ,  $d/L \ll 1$ ,  $a/L \ll 1$ .

#### 3. Костер на далекой планете

Известно, что в невесомости свеча гаснет, поскольку из-за отсутствия конвекции в области горения быстро заканчивается кислород. Будут ли условия для горения неограниченно улучшаться с ростом ускорения свободного падения  $g$ ? Оценить, при каком значении  $g$  горение станет невозможным, если такое вообще произойдет. Предположим, что химический состав атмосферы зафиксирован и совпадает с земным. Зависит ли в этом случае ответ только от величины  $g$  и от каких-то еще факторов? При условии фиксированного химического состава атмосферы, лучше или хуже, чем на Земле, горел бы костер на поверхности Марса, Плутона или планеты, похожей на Юпитер?

#### 4. Формула остроты

Все мы знаем, что есть большая разница - резать что-либо острым или тупым ножом. Поразмышляйте о том, откуда эта разница берется. Почему вообще нож может что-то разрезать? Почему замороженное масло резать трудно, а при комнатной температуре - легко? Попробуйте использовать для анализа модель лезвия, поперечное сечение которого показано на рисунке: с радиусом закругления  $R$  и углом схождения плоскостей  $\alpha$ . Интуитивно понятно, что чем меньше  $R$ , тем «лучше заточка». Но ясно и то, что  $R$  не может быть сколь угодно малым, скажем, ангстремного размера, так как нож – макроскопический объект. Таким образом, вероятно, существует некоторое оптимальное  $R$  для наилучшей резки. Что это значит количественно? Как зависит от материала, из которого сделан нож и того, что им предполагается резать? Какую роль играет угол  $\alpha$ ? Или, возможно, вы предложите свою модель резки?



#### 5. Успеете ли вы поймать уроненный платок?

В развитии физики важную роль сыграло изучение движения различных объектов в поле тяжести Земли. Это и знаменитые опыты Галилея, в том числе, бросание шаров с Пизанской башни, и наблюдение за маятниками, и понятие космической скорости и многое другое. Задача о движении в поле тяжести, однако, становится гораздо более сложной с учетом сопротивления воздуха, если рассматривать перемещение объектов, которые могут изменять свою форму. В качестве примера можно привести свободное падение шелкового платка. Поразмышляйте о характерном (среднем по большому числу экспериментов) времени, которое занимает падение квадратного листа бумаги со стороной  $a$  с высоты  $h$  в поле тяжести Земли (и поэкспериментируйте!). Представьте, что вы можете изменять плотность воздуха и изгибную жёсткость листа. Как будут выглядеть в этих двух переменных линии постоянного среднего времени падения?